

La méthode de Lanczos pour les systèmes linéaires

C. Brezinski*

10 décembre 1999

La méthode de Lanczos pour la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ est une méthode de projection sur un sous-espace de Krylov. Elle consiste à générer une suite de vecteurs x_k définis par les deux conditions

1. $x_k - x_0 \in \text{span}(r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0)$
2. $r_k = b - Ax_k \perp \text{span}(y, A^T y, \dots, A^{T^{k-1}} y)$

où x_0 est le vecteur de départ et y un vecteur (presque) arbitraire.

On montre d'abord comment la théorie des polynômes orthogonaux formels (POF) s'introduit de façon tout à fait naturelle dans la méthode de Lanczos. Certaines propriétés de ces POF sont données.

On montre ensuite comment les relations de récurrence entre familles adjacentes de FOP conduisent à des algorithmes récursifs pour mettre en œuvre la méthode de Lanczos. Parmi ces méthodes, on retrouve l'algorithme du gradient biconjugué ainsi que l'algorithme du gradient conjugué lorsque A est symétrique définie positive. D'autres algorithmes, dont certains nouveaux, sont également obtenus.

Dans ces algorithmes, une division par zéro (appelée breakdown) peut se produire. On montre à quoi elle correspond dans la théorie des POF et comment l'éviter. Des divisions par des nombres voisins de zéro (near-breakdown) peuvent aussi avoir lieu. Ils conduisent à de l'instabilité numérique. On montre, là encore, comment les éviter.

*Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655-Villeneuve d'Ascq cedex, France. E-mail: Claude.Brezinski@univ-lille1.fr

Ces techniques s'appliquent également aux autres méthodes de type-Lanczos comme le CGS ou le BiCGSTAB.

Enfin, on évoquera le problème de l'estimation de la norme de l'erreur dans les méthodes (directes et itératives) de résolution des systèmes linéaires.