Probabilités et Statistique I&II

Prof. A. C. Davison
EPFL, Institut de mathématiques

Système de communication

Corrigé-Test I

Exercice 1 **(a)** (6 pts)

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(f,i), i \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \bigcup \{(p,j), j \in \{1,3,5\}\} \\
A &= \{(p,3),(f,3)\} \\
B &= \{(f,1),(f,2),(f,3),(f,4),(f,5),(f,6)\} \\
C &= \{(p,1),(p,3),(f,1),(f,2),(f,3)\}.
\end{aligned}$$

Avec p pour dire pile et f pour face

(b) (6 pts)

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A|B).P(B) + P(A|\overline{B}).P(\overline{B}) \\
&= \frac{1}{6}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C|B).P(B) + P(C|\overline{B}).P(\overline{B}) \\
&= \frac{3}{6}.\frac{1}{2} + \frac{4}{6}.\frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

(c) (7 pts)

$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{1/6.1/2}{1/4} \\
&= 1/3.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (20 pts) La probabilité d'avoir un double 6 lors d'un jet est $\frac{1}{36}$, donc la probabilité de ne pas avoir un double 6 lors d'un jet est $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.
Puisque tous les jets sont indépendants, alors la probabilité de ne pas avoir de double 6 si on jette deux dés 24 fois est

$$p = (\frac{35}{36})^{24}.$$

Exercice 3 (20 pts)

$$\Omega = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$$

On voit que les seuls cas possibles sont $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$ et $(3,2,1)$
La probabilité demandée est égale à

$$p = 4/6 = 2/3.$$

Exercice 4 Posons $P_1 = P(\text{le produit est divisible par 5})$ et $P_2 = P(\text{le produit a 5 comme dernier chiffre})$.

(a) (10 pts)

$$\begin{aligned} P_1 &= P(\text{au moins un dé donne 5}) \\ &= 1 - P(\text{aucun dé ne donne 5}) \\ &= 1 - (\frac{5}{6})^4 \\ &= 671/1296 = 0.517. \end{aligned}$$

(b) (10 pts) Pour avoir 5 comme dernier chiffre, il suffit d'avoir un dé avec la valeur 5 et et les trois autres avec des nombres impairs.
On a C_4^1 façon de choisir le dé qui donnera le nombre 5 avec une probabilié 1/6, et les trois autres dés peuvent donner des nombres impairs avec une probabilité 1/2 chacun :

$$p = C_4^1 . \frac{1}{6} . (\frac{1}{2})^3 = 1/12.$$

Exercice 5 Posons les événements suivants : B_i = "le document est dans la boîte i", i= 1, 2, 3.
T_1 = "on a cherhcé une fois dans la première boîte et on a pas trouvé"
T_2 = "on a cherhcé deux fois dans la première boîte et on a pas trouvé"
T_1 = "on a cherhcé une fois dans les trois boîtes et on a pas trouvé"

(a) (7 pts)

$$P_{B_1|T_1} = \frac{P\{T_1|B_1\}.P\{B_1\}}{P\{T_1\}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P\{T_1|B_1\}.P\{B_1\}}{P\{T_1|B_1\}.P\{B_1\}+P\{T_1|\overline{B_1}\}.P\{\overline{B_1}\}}\\
&= \frac{(1-p_1).1/3}{(1-p_1).1/3+1.2/3}\\
&= \frac{(1-p_1)}{(1-p_1)+2}.
\end{aligned}
$$

(b) (7 pts)

$$
\begin{aligned}
P_{B_1|T_2} &= \frac{P\{T_2|B_1\}.P\{B_1\}}{P\{T_2\}}\\
&= \frac{P\{T_2|B_1\}.P\{B_1\}}{P\{T_2|B_1\}.P\{B_1\}+P\{T_2|\overline{B_1}\}.P\{\overline{B_1}\}}\\
&= \frac{(1-p_1)^2.1/3}{(1-p_1)^2.1/3+1.2/3}\\
&= \frac{(1-p_1)^2}{(1-p_1)^2+2}.
\end{aligned}
$$

(c) (6 pts)

$$
\begin{aligned}
P_{B_1|T_3} &= \frac{P\{T_3|B_1\}.P\{B_1\}}{P\{T_3\}}\\
&= \frac{P\{T_3|B_1\}.P\{B_1\}}{P\{T_3|B_1\}.P\{B_1\}+P\{T_3|B_2\}.P\{B_1\}+P\{T_3|B_3\}.P\{B_3\}}\\
&= \frac{(1-p_1).1/3}{(1-p_1).1/3+(1-p_2).1/3+(1-p_3).1/3}\\
&= \frac{(1-p_1)}{3-p_1-p_2-p_3}.
\end{aligned}
$$

Exercice 6 **(a)** (8 pts) L'ensemble fondamental est :

$$\Omega = \{(a,b,c) \in \{m,p\}^3\}$$

m pour mûr et p pour périmé.

(b) (12 pts) Soit X le nombre de pamplemousses mûrs tirés. X suit une loi hypergéomètrique de paramètres $(3, 12, 4)$ et qui a comme loi

$$P_X(k) = \frac{C_{12}^k.C_{3-k}^4}{C_{16}^3}, \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3.$$

et espérance

$$E[X] = \frac{12.3}{12+4} = 2.25$$